$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OP}\right|^2\left(\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha\right)=\overline{RQ}^2 \Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = \frac{\overline{RQ}^2}{\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha} \quad (1)$$

Esta es la ecuación del lugar geométrico buscado donde β es el ángulo formado entre $\overrightarrow{OP}$ y $\vec{e}_1$ y γ el ángulo comprendido entre $\overrightarrow{OP}$ y $\vec{e}_2$. Se trata por tanto de una circunferencia con centro en 0. Podemos simplificar la expresión encontrada para su radio pues basta considerar que α = β ± γ según que P esté en el sector de ángulo α (figura 2) o en el sector de ángulo π–α (figura 1). Haciendo operaciones resulta:

$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\gamma)\cdot\cos(\alpha) =$$
$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma \pm \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma)\cdot\mathrm{sen}(\beta)\cdot\mathrm{sen}(\gamma) =$$
$$= \cos^2\beta\cdot\mathrm{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma\cdot\mathrm{sen}^2\beta \pm \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma)\cdot\mathrm{sen}(\beta)\cdot\mathrm{sen}(\gamma) = \mathrm{sen}^2(\beta\pm\gamma) = \mathrm{sen}^2\alpha$$

con lo que la ecuación (1) queda de la forma: $\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = \dfrac{\overline{RQ}^2}{\mathrm{sen}^2\alpha}$ y por tanto se trata de la circunferencia de centro O y radio $\dfrac{\overline{RQ}}{\mathrm{sen}\,\alpha}$

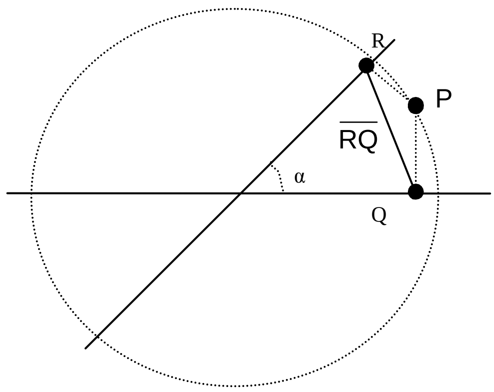


Figura 2.

b) Respecto del sistema de referencia $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ las componentes (x,y) de P son las proyecciones $\overline{OR} = \overrightarrow{OP}\cdot\vec{e}_1$ y $\overline{OQ} = \overrightarrow{OP}\cdot\vec{e}_2$, respectivamente, por tanto la condición dada es: $\left|x\vec{e}_1 - y\vec{e}_2\right| = \overline{RQ} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha) = \overline{RQ}$ (2)

c) Si α = $\frac{\pi}{2}$ el sistema de referencia {O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$} es cartesiano y como $\cos\frac{\pi}{2}$ = 0 la ecuación (2) queda de la forma: $x^2 + y^2 = \overline{RQ}$ que respecto de un sistema de referencia cartesiano es la ecuación de una circunferencia, en este caso de centro O y radio $\overline{RQ}$.

15.11.- Se dan las rectas:

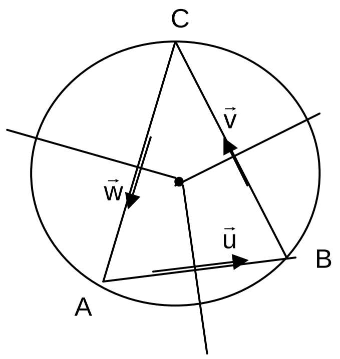
$$r_1: \quad x + y - 2 = 0$$
$$r_2: \quad x + 2y - 3 = 0$$
$$r_3: \quad 3x + y - 4 = 0$$

Hallar los vértices A, B y C de un triángulo sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita es 2 y que r_1 es la mediatriz de $\overline{AB}$, r_2 es la mediatriz de $\overline{BC}$, y r_3 la de $\overline{CA}$. ¿Cuántas soluciones hay?. Hallarlas todas. (Andalucía, 2002)

Solución:

En primer lugar tengamos en cuenta que si el triángulo de vértices {A,B,C} es solución del problema y σ_O es la simetría de centro el cincuncentro O, entonces el triángulo $\{\sigma_O(A),\sigma_O(B),\sigma_O(C)\}$ también es solución pues r_1, r_2 y r_3 también serán mediatrices de los lados homólogos, por tanto el problema tiene al menos dos soluciones. Para encontrarlas utilizaremos la teoría vectorial pues simplifica las ecuaciones y evita errores en los cálculos.

Sean A, B, y C los trés vértices del triángulo, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores ortogonales a r_1, r_2 y r_3 respectivamente y O el centro de la circunferencia circunscrita de radio ρ. Entonces se cumplen las siguientes igualdades:



$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \rho \quad (1)$$
$$A + \alpha\vec{u} = B \quad (2)$$
$$B + \beta\vec{v} = C \quad (3)$$
$$C + \gamma\vec{w} = A \quad (4)$$
$$\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \rho \quad (5)$$
$$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \rho \quad (6)$$

para ciertos escalares α, β y γ.

Sumando (2), (3) y (4) se deduce: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$, por lo que los parámetros α y β están ligados mutuamente mediante el parámetro γ. Así las ecuaciones resultantes quedan de la forma:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0 \quad (7)$$
$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \rho$$
$$\left\|\overrightarrow{OA} + \alpha\vec{u}\right\| = \rho \Rightarrow \left\|\overrightarrow{OA} + \alpha\vec{u}\right\|^2 = (\overrightarrow{OA} + \alpha\vec{u})\cdot(\overrightarrow{OA} + \alpha\vec{u}) = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 + \alpha^2\left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\alpha\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA} = \rho^2 \quad (5')$$
$$\left\|\overrightarrow{OA} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right\| = \rho \Rightarrow \left\|\overrightarrow{OA} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 + \alpha^2\left\|\vec{u}\right\|^2 + \beta^2\left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\alpha\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA} + 2\beta\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA} +$$
$$+ 2\alpha\beta\vec{u}\cdot\vec{v} = \rho^2 \quad (6')$$

Sustituyendo (1) en (5') y (6') las ecuaciones se simplifican; al tiempo eliminamos el parámetro γ de (7):

$$\alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w}) = 0$$

$$\alpha\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \quad (5'') \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{v}\|^2(\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA})(\vec{u}\times\vec{w}) + \|\vec{u}\|^2(\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA})(\vec{v}\times\vec{w}) = \\ = 2(\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA})(\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{v}\times\vec{w}) \qquad (8) \end{array} \right.$$

$$\beta\|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA} + 2\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad (6'') \Rightarrow$$

$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 = \rho^2 \qquad (9)$$

donde para el cálculo de los productos vectoriales podemos suponer que $\mathbf{R}^2$ es el plano z = 0 de $\mathbf{R}^3$.

A partir de las ecuaciones de r_1, r_2 y r_3 se obtienen de forma inmediata los vectores ortogonales $\vec{u}$ = (1,1), $\vec{v}$ = (1,2) y $\vec{w}$ = (3,1). El circuncentro es el punto O = (1,1) y el radio $\rho = 2$, por lo que denotando las coordenadas del punto A como (a_1,a_2) las ecuaciones (8) y (9) quedan de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} -10[(a_1 - 1) + (a_2 - 1)] - 10[(a_1 - 1) + 2(a_2 - 1)] = -30[(a_1 - 1) + (a_2 - 1)] \\ (a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 = 4 \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$ ó -1. Por lo que las dos únicas ternas de soluciones posibles son:

A = (1,3) B = (-1,1) C = (-1/5,13/5)

A' = (1,-1) B' = (3,1) C' = (11/5,-3/5)

obtenidas para los valores de los parámetros $\alpha = -2$, $\beta = 4/5$, $\alpha' = 2$ y $\beta' = -4/5$ según (5'') y (6'').

En suma, respondiendo a la pregunta del enunciado, el problema tiene dos únicas soluciones que son las indicadas, y los triángulos que son solución son homólogos mediante la simetría de centro O.