

TEMA 1

NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1. El conjunto de los números naturales.
 - 1.1. Introducción.
 - 1.2. Definición y propiedades.
2. Operaciones en el conjunto de los números naturales.
 - 2.1. Adición de números naturales. Propiedades.
 - 2.2. Multiplicación de números naturales. Propiedades.
3. Orden en \mathbf{N} .
 - 3.1. Orden total en \mathbf{N} .
 - 3.2. Buena ordenación de \mathbf{N} .
 - 3.3. Orden estricto en \mathbf{N} .
4. Sistemas de numeración.
 - 4.1. División.
 - 4.2. Teorema fundamental de la numeración.
 - 4.3. Propiedades de la numeración.
 - 4.4. Cambio de un sistema de numeración a otro.
 - 4.4.1. Paso de sistema en base n a sistema decimal.
 - 4.4.2. Paso de sistema decimal a sistema en base n .
 - 4.5. Operaciones en una base cualquiera.
 - 4.5.1. Adición.
 - 4.5.2. Sustracción.
 - 4.5.3. Multiplicación.
 - 4.5.4. División.

1. El conjunto de los números naturales.

1.1. Introducción.

La construcción del conjunto de los números naturales se puede hacer:

- a) A partir de la teoría de conjuntos, definiendo el concepto de numeral.
- b) Desde un punto de vista axiomático, esto es, estableciendo un número de axiomas, y a partir de ellos probar una serie de teoremas que no son otra cosa que sus propiedades (método seguido por Peano y Hilbert).
- c) A través del cálculo de clases de equivalencia obtenidas por la relación de coordinabilidad entre conjuntos (método iniciado por Cantor, Frege y perfeccionado por Russell).

Seguiremos el primer camino pues no exige ningún tipo de axiomas salvo los propios de la teoría de conjuntos y permite la demostración de todas las propiedades de los números naturales de una manera sencilla y original como el método b).

1.2. Definición y propiedades.

Definición 1.2.1.

Dado un universo U , se llama *numeral* de U a todo subconjunto V de U que verifique las siguientes condiciones:

1. $\emptyset \in V$
2. $x \in V \Rightarrow x \cup \{x\} \in V$

Denotaremos $x' = x \cup \{x\}$ y lo designaremos como "*siguiente de x*".

La clase C de los numerales (que existe por el axioma de clasificación) de un universo U , es no vacía, puesto que el propio U es un numeral. Llamaremos $N = \bigcap C$ a la intersección de todos los numerales.

N verifica las siguientes propiedades:

- $N_1) \emptyset \in N$
- $N_2) \text{ Si } x \in N \text{ entonces } x \cup \{x\} = x' \in N$
- $N_3) \text{ Si } M \subseteq N \text{ satisface } N_1) \text{ y } N_2) \text{ entonces } M = N. \text{ Principio de inducción.}$

Las propiedades $N_1)$ y $N_2)$ son inmediatas, $N_3)$ es también directa. En efecto, sea $M \subseteq N$ verificando $N_1)$ y $N_2)$, entonces M es un numeral, es decir $M \in C$ luego $\bigcap C \subseteq M$, esto es, $N \subseteq M$ y así $M = N$.

Definición 1.2.2.

Llamamos *números naturales* a los elementos de N .

Como $\emptyset \in N$, \emptyset es un número natural al que llamaremos "cero" y denotaremos $\emptyset \equiv 0$; también $\{\emptyset\} \in N$, que llamaremos "uno" y denotaremos $\{\emptyset\} \equiv 1$. Decimos que 1 es el *siguiente* de 0, en el sentido de que $\emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$. Continuando de este modo $1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{1\} = \{0,1\} \equiv 2$, $2 \cup \{2\} = \{\emptyset, 1\} \cup \{\{\emptyset, 1\}\} = \{0,1,2\} \equiv 3$, $3 \cup \{3\} = \{\emptyset, 1, 2\} \cup \{\{\emptyset, 1, 2\}\} = \{0,1,2,3\} \equiv 4$, Evidentemente $\{0,1,2,\dots\} = N$,

pues si llamamos $M = \{0,1,2,\dots\}$ tenemos $M \subseteq \mathbf{N}$ y M verifica $N_1)$ y $N_2)$, luego $M = \mathbf{N}$.

Proposición 1.2.1. Propiedades de \mathbf{N} .

- a) $\forall n \in \mathbf{N} \quad n' \not\subseteq 0$
- b) Sí $m, n \in \mathbf{N}$, con $m \in n$, entonces $m \subseteq n$
- c) Sí $m' \subseteq n'$, entonces $m \subseteq n$
- d) $m' = n' \Leftrightarrow m = n$

Demostración:

- a) $n' = n \cup \{n\} \neq \emptyset$ ya que tiene al menos un elemento n , luego $n' \not\subseteq 0$
- b) Consideramos $M = \{n \in \mathbf{N} / m \in n \Rightarrow m \subseteq n\}$. Entonces $M \subseteq \mathbf{N}$. Veamos que verifica $N_1)$ y $N_2)$ con lo que será $M = \mathbf{N}$ y quedará demostrado.

$N_1)$ $\emptyset \in M$ pues la hipótesis $m \in \emptyset$ es ya de por sí imposible.

$N_2)$ Supongamos que $n \in M$ y veamos que $n' = n \cup \{n\} \in M$. Para ello se ha de probar que sí $m \in n'$ entonces $m \subseteq n'$. En efecto, sea $m \in n' = n \cup \{n\}$, entonces $m \in n$ ó $m = n$. Sí $m \in n$, entonces:

$$m \subseteq n \subseteq n \cup \{n\} = n'$$

Sí $m = n$, entonces $m = n \subseteq n \cup \{n\} = n'$. Luego en ambos casos $m \subseteq n'$.

- c) $m' = m \cup \{m\} \subseteq n' = n \cup \{n\}$. Tenemos $m \in m' \subseteq n'$, esto es, $m \in n'$ de lo cual se sigue $m \in n$ ó $m = n$.

Sí $m \in n$ entonces $m \subseteq n$. Sí $m = n$, entonces $m \subseteq n$. En todo caso, $m \subseteq n$.

- d) Si $m = n$, entonces $m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$, esto es, $m' = n'$.

Si $m' = n'$, entonces por c), $m' \subseteq n'$ implica $m \subseteq n$ y $n' \subseteq m'$ implica $n \subseteq m$, luego $m = n$.

$N_1)$, $N_2)$, $N_3)$, a) y d) son los llamados *axiomas de Peano*.

Denotaremos como \mathbf{N}^* al conjunto $\mathbf{N} - \{0\}$.

Proposición 1.2.2.

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad n \neq n'$$

Demostración:

Hacemos uso del principio de inducción. Consideramos el conjunto:

$$M = \{n \in \mathbf{N} / n \neq n'\}$$

Vemos que $M \subseteq \mathbf{N}$ y $0 \in M$ por la propiedad a).

Supongamos $n \in M$; entonces:

$$n \neq n' \Rightarrow n' \neq (n')' \text{ por d) y por lo tanto } n' \in M \text{ con lo que } M = \mathbf{N}.$$

Proposición 1.2.3.

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \exists m \in \mathbf{N} / n = m'$$

Demostración:

$$\text{Sea } M = \{0\} \cup \{n \in \mathbf{N}^* / \exists m \in \mathbf{N} / n = m'\}$$

$0 \in M$, es obvio. Sea $m \in M$, entonces $m \in \mathbf{N}$ y por la propiedad N_2) también $m' \in \mathbf{N}$, además por la propiedad a) se tiene que $m' \neq 0$ y por tanto $M = \mathbf{N}$.

Esto es, todo número natural distinto de 0 es el siguiente de otro número natural.

2. Operaciones en el conjunto de los números naturales.

2.1. Adición de números naturales. Propiedades.

Sea la aplicación $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que para todo par

$(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow f(x, y) \in \mathbf{N}$, verificando:

$$(1) f(x, 0) = x \quad \forall x \in \mathbf{N}$$

$$(2) f(x, y') = [f(x, y)]' \quad \forall x, y \in \mathbf{N}$$

Veamos que esta aplicación existe y es única.

a) Existencia.

Consideramos el conjunto M definido por:

$M = \{x \in \mathbf{N} / \exists f_x: \{x\} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \text{ que cumple:}$

$$f_x(x, 0) = x$$

$$f_x(x, y') = [f_x(x, y)]' \quad \forall y \in \mathbf{N}\}$$

$0 \in M$ pues basta definir $f_0: \{0\} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $f_0(0, y) = y \quad \forall y \in \mathbf{N}$ con lo que cumple las condiciones exigidas:

$$f_0(0, 0) = 0$$

$$f_0(0, y') = y' = [f_0(0, y)]' \quad \forall y \in \mathbf{N}$$

Supongamos ahora $x \in M$, esto es, existe $f_x: \{x\} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ verificando:

$$f_x(x, 0) = x$$

$$f_x(x, y') = [f_x(x, y)]'$$

Veamos que $x' \in M$. Definimos la aplicación:

$f_{x'}: \{x'\} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que:

$$f_{x'}(x', y) = [f_x(x, y)]'$$

Entonces:

$$f_{x'}(x', 0) = [f_x(x, 0)]' = x'$$

$$f_{x'}(x', y') = [f_x(x, y')] = [f_x(x, y)]' = [f_{x'}(x', y)]'$$

Luego $x' \in M$ y por tanto $M = \mathbf{N}$.

Como esto se verifica para cada $x \in \mathbf{N}$, siempre existe $f_x: \{x\} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ para todo $x \in \mathbf{N}$ y podemos garantizar que existe $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definida como

$$f(x, y) = f_x(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbf{N}.$$

b) Unicidad.

Consideramos que existen dos aplicaciones f y g ambas de $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ que satisfacen las condiciones (1) y (2).

Para cada $x \in \mathbf{N}$ definimos el conjunto $M_x = \{y \in \mathbf{N} / f(x, y) = g(x, y)\}$

$0 \in M_x$, puesto que $f(x, 0) = x = g(x, 0)$

Supongamos $y \in M_x$ entonces: $f(x,y') = [f(x,y)]' = [g(x,y)]' = g(x,y')$
 luego $y' \in M_x$ y resulta $M_x = \mathbf{N}$.

Como este razonamiento es válido para cada $x \in \mathbf{N}$ podemos concluir que
 $f(x,y) = g(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbf{N}$, esto es, $f = g$.

A esta aplicación única se la conoce con el nombre de *adición* o *suma* de números naturales y se simboliza con el signo "+".

Así pues se puede definir la adición de números naturales como una aplicación $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que para cada par de números naturales (x,y) existe un único número $x + y$ tal que:

- (1) $x + 0 = x$
- (2) $x + y' = (x + y)'$

Proposición 2.1.1.

Con esta definición se verifica:

a) $\forall x \in \mathbf{N} \quad x + 1 = x'$

Demostración:

$$x + 1 = x + 0' = (x + 0)' = x'$$

b) $x + y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$

Demostración:

\Rightarrow) Sea $y = 0 \quad x + y = x + 0 = x = 0$

Sea $y \neq 0$ entonces $y = z'$, y se tiene:

$x + y = x + z' = (x + z)' = 0$, contradicción por el axioma a) de Peano.

\Leftarrow) $x = y = 0 \Rightarrow x + y = 0 + 0 = 0$

Proposición 2.1.2. Propiedades de la adición.

a) Asociativa.

Para todo $a, b, c \in \mathbf{N}$ se verifica:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Demostración:

i) Sea el conjunto $M = \{x \in \mathbf{N} / (a + b) + x = a + (b + x)\}$.

$0 \in M$ ya que $(a + b) + 0 = (a + b) = a + (b + 0)$

ii) Sea ahora un número $z \in M$, entonces: $(a + b) + z = a + (b + z)$

Veamos que $z' \in M$.

$$\begin{aligned} (a + b) + z' &= ((a + b) + z)' = (a + (b + z))' = a + (b + z)' = \\ &= a + (b + z') \end{aligned}$$

Por el axioma N_3 de Peano $M = \mathbf{N}$ y por tanto el conjunto de los números naturales satisface la propiedad asociativa.

b) Existencia de elemento neutro.

$\forall x \in \mathbf{N}, \quad x + 0 = 0 + x = x$

Demostración: Aplicamos el axioma de inducción.

Definimos $M = \{x \in \mathbf{N} / x + 0 = 0 + x\}$

i) $0 \in M$ de forma evidente.

ii) Sea $x \in M$, entonces $x + 0 = 0 + x$.