

## **TEMA 17**

# **PROGRAMACIÓN LINEAL. APLICACIONES**

1. Introducción.
2. Planteamiento general.
3. Conjuntos convexos y soluciones posibles.
4. Método Simplex.
5. Método gráfico de resolución.

## 1. Introducción.

Los principios de lo que llamamos *programación lineal* surgieron a finales de los años 40 y comienzo de los 50 del pasado siglo tras la publicación de trabajos sobre organización y planificación de recursos por matemáticos como Kantorovich, Koopsmans y Stigler que dieron solución a muchos problemas de optimización y planificación de la producción en la industria sobre todo tras la segunda guerra mundial, y culminaron con los trabajos de Danzning en el llamado *método Simplex* que aborda la resolución de cualquier problema genérico de programación lineal.

La programación lineal se enmarca dentro de lo que es la teoría general de optimización de funciones sujetas a restricciones. Los problemas de programación lineal tratan de maximizar o minimizar una cierta función lineal llamada función objetivo sujeta a unas determinadas restricciones que no son otra cosa que desigualdades lineales que ligan las variables de la función.

## 2. Planteamiento general.

Un problema genérico de programación lineal consiste en minimizar (o maximizar) una función lineal:

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

sujeta a las restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{m1}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

También pueden tratarse de desigualdades  $\geq$

A la función  $z$  se le llama *función objetivo*, y a las condiciones que cumplen las variables, *restricciones*.

Planteado en estos términos pueden existir muchos problemas de programación diferentes, pero como veremos todos se pueden reducir a un mismo tipo.

### Proposición 2.1.

Todo problema de programación lineal es equivalente a un problema lineal de minimización en el que las restricciones son ecuaciones lineales de variables positivas.

Demostración:

- i) Maximizar  $z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$  equivale a minimizar  
 $-z = -C_1x_1 - C_2x_2 - \dots - C_nx_n$

- ii) Si debe ser para algún  $j$ ,  $x_j \leq 0$ , se reemplaza  $x_j$  por  $-x_j' = x_j$ . Si algún  $x_j$  no está sometido a ninguna condición de signo se reemplaza  $x_j$  por  $x_j' - x_j''$  con  $x_j', x_j'' \geq 0$
- iii) Si alguna inecuación es de la forma  $\geq$  se cambian de signo los dos miembros de la inecuación resultando una desigualdad de la forma  $\leq$ .
- iv) Una inecuación de la forma  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$  se transforma en una ecuación lineal sumando al primer miembro una nueva variable positiva  $x_{n+1} \geq 0$  llamada *variable débil* o *de holgura*, quedando de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

Según todo esto el problema inicial de programación lineal se convierte en el problema:

"Minimizar la función:  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{m1}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\ \text{con } x_j &\geq 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n+m\} \end{aligned}$$

En notación matricial el problema también se puede plantear en los siguientes términos:

"Minimizar  $z = C \cdot X$  con las restricciones  $A \cdot X = B$  y  $X \geq 0$ " siendo las matrices correspondientes:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_n, \overbrace{0, \dots, 0}^m]$$

En lo que sigue denotaremos como  $P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$  al vector columna  $j$ -ésimo de

la matriz  $A$ , con lo cual:

$$A = [P_1, P_2, \dots, P_n, I]$$

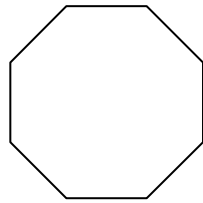
### 3. Conjuntos convexos y soluciones posibles.

Definición 3.1.

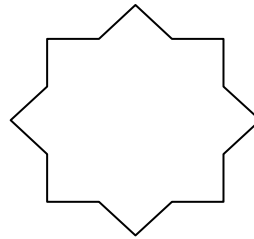
Sea  $C \subset \mathbf{R}^n$ . Se dice que  $C$  es un conjunto *convexo* si todo segmento rectilíneo que une dos puntos cualquiera de  $C$  está también contenido en  $C$ , esto es:

$$\forall X_1, X_2 \in C, \quad \forall \lambda / 0 \leq \lambda \leq 1 : \quad \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \in C$$

Ejemplo 3.1. Un polígono regular sería un ejemplo de conjunto convexo (figura a), sin embargo un polígono estrellado no (figura b).



a) Hexágono



b) Estrella

Definición 3.2.

Una *combinación lineal convexa* de los puntos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es un punto

dado por:  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$  donde  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  y  $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

Definición 3.3.

Un punto  $X \in C$  se dice *extremo* o *vértice* si no puede expresarse como combinación convexa de dos puntos distintos de  $C$ , esto es:

$$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2, \quad X_1 \neq X_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda = 1$$

Ejemplo 3.2: Un círculo es un ejemplo de conjunto convexo con infinitos vértices. Un pentágono regular tiene solo cinco vértices.

Observación 3.1.

Se demuestra sin dificultad que si el conjunto  $X$  es cerrado los extremos son puntos de su frontera y que los abiertos convexos no tienen vértices. Por tanto a partir de ahora los conjuntos convexos que manejaremos en programación lineal serán cerrados y como veremos con un número finito de vértices.

Se demuestra el siguiente teorema debido a Krein-Mirman de suma importancia en lo que sigue: "todo punto de un conjunto convexo y compacto se puede expresar como combinación lineal convexa de sus vértices".

Definición 3.4.

Se llama *solución posible* o *factible* a cualquier punto  $X \in \mathbf{R}^n$  que satisface el conjunto de restricciones  $A \cdot X = B$  y  $X \geq 0$ . Denotamos el conjunto de todas las soluciones factibles como **F**.

Proposición 3.1.

El conjunto de todas las soluciones factibles de un problema de programación lineal, es convexo.

Demostración:

Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos soluciones posibles. Entonces:

$$A \cdot X_1 = B, X_1 \geq 0 \quad A \cdot X_2 = B, X_2 \geq 0$$

Sea  $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ , entonces:

$$A \cdot X = A \cdot (\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) = \lambda A X_1 + (1 - \lambda)A X_2 = \lambda B + (1 - \lambda)B = B$$

Como  $X_1, X_2 \geq 0$  y  $\lambda, 1 - \lambda \geq 0$  también  $X \geq 0$  y por tanto  $X$  es solución factible del problema, luego el conjunto de soluciones es convexo.

Proposición 3.2.

Si existen  $k$  vectores  $P_i$  linealmente independientes y  $\sum_{i=1}^k x_i P_i = B$  con  $x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$ , entonces el punto

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_k, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-k}]$$

es un vértice de  $F = \{ X / [P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n] \cdot X = B, X \geq 0 \}$

Demostración:

Evidentemente  $X \in F$  por ser solución factible. Veamos que es un vértice. Para ello demostraremos que si  $X = \lambda Y + (1 - \lambda)Z$  con  $0 < \lambda < 1$  entonces  $Y = Z$ .

Si  $0 < \lambda < 1$  entonces  $y_i = z_i = 0 \quad \forall i > k$  por ser  $y_j, z_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  y  $x_i = 0 \quad \forall i > k$ .

Por otra parte  $Y$  y  $Z$  son soluciones factibles luego:

$$y_1 P_1 + y_2 P_2 + \dots + y_k P_k = B \quad z_1 P_1 + z_2 P_2 + \dots + z_k P_k = B$$

Pero como las  $P_i$  son linealmente independientes las coordenadas de  $B$  respecto al sistema  $\{P_i\}$  son únicas, y de aquí que

$$y_i = z_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \Rightarrow Y = Z$$

Así pues si  $Y \neq Z$  y  $X = \lambda Y + (1 - \lambda)Z$  con  $0 < \lambda < 1$  entonces es  $\lambda = 0$  ó  $\lambda = 1$  y  $X$  es un vértice de  $F$ .

Proposición 3.3.

Si  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$  es un vértice de  $F$  entonces los vectores  $P_i$  asociados a las  $x_i$  positivas mediante  $\sum_{i=1}^n x_i P_i = B$  son linealmente independientes.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que son las  $k$  primeras componentes de  $X$  distintas de cero, esto es: