TEMA 22
FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS. SITUACIONES REALES EN LAS QUE APARECEN

1. La función exponencial de variable real.
2. La función exponencial de base e.
3. La función logarítmica de base e.
4. Funciones exponencial y logarítmica en una base cualquiera.
5. Situaciones reales en las que aparecen.

1. La función exponencial de variable real.

Demostraremos en esta sección que toda función continua y real de variable real f, que verifique la propiedad: $f(x+y)= f(x)\cdot f(y)$, es una función exponencial, esto es, verifica también las propiedades conocidas de las potencias con exponente natural y además que, caso de existir tal función, es única. Demostraremos en primer lugar la unicidad ya que las diferentes definiciones que se den de la función exponencial sólo tienen sentido si definen la "misma función" exponencial.

Definición 1.1.

Sea $a \in \mathbf{R}$. Se llama función *exponencial de base* a y variable real, a toda función continua $f_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que verifica las propiedades:

i) $f_a(1) = a$

ii) $f_a(x+y) = f_a(x)\cdot f_a(y)$

Veamos que esta definición tiene sentido, esto es, que sólo puede existir una única función que cumpla las condiciones del enunciado. Pero antes aclararemos que, de existir tal función, la imagen de f_a está contenida en $\mathbf{R}^+$ y en consecuencia también la base a es positiva.

Proposición 1.1.

Sea f_a una función exponencial de base a, entonces:

$$\forall\, x \in \mathbf{R}: f_a(x) \in \mathbf{R}^+$$

Demostración:

Sea $x\in\mathbf{R}$. Entonces:

$$f_a(x) = f_a\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f_a\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f_a\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f_a\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0$$

Corolario 1.1.

La base a es positiva.

Observación 1.1.

Aunque puede ser $a = 0$ sólo consideramos bases $a > 0$ ya que si $a = 0$ entonces $\forall\, x\in\mathbf{R}$: $f_a(x) = f_a(x-1+1) = f_a(x-1)\cdot f_a(1) = 0$ y f_a sería la función nula.

Proposición 1.2. Unicidad

Si existe, la función exponencial de base a es única y verifica las siguientes propiedades.

a) $a \neq 0 \Rightarrow f_a(0) = 1,\ f_a(x) > 0 \quad \forall\, x\in\mathbf{R}$

b) $f_a(n) = a^n \quad \forall\, n\in\mathbf{N}$

c) $f_a(m) = \dfrac{1}{a^{-m}} \quad \forall\ m \in \mathbf{Z}^-$

d) $f_a\left(\dfrac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}^*,\ \forall\ m \in \mathbf{N}$

$f_a\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}^*,\ \forall\ m \in \mathbf{Z}^-$

Demostración:

Demostraremos en primer lugar que la exponencial de base a cumple las propiedades indicadas y después demostraremos la unicidad.

a) $a = f_a(1) = f_a(1+0) = f_a(1)\cdot f_a(0) = a\cdot f_a(0) \Rightarrow f_a(0) = 1$

Sea $x \in \mathbf{R}$ tal que $f_a(x) = 0$, entonces:

$$a = f_a(1) = f_a(1-x+x) = f_a(1-x)\cdot f_a(x) = 0, \text{ absurdo.}$$

b) Lo haremos por inducción.

Sea f_a: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ continua y que verifica las propiedades i) y ii) de la definición 1.1. Entonces tenemos:

$$f_a(0) = 1 = a^0 \text{ y se cumple para } n = 0.$$

Supongamos se verifique para un $n \in \mathbf{N}$, entonces:

$$f_a(n+1) = f_a(n)\cdot f_a(1) = a^n\cdot a = a^{n+1}$$

Por tanto se cumple para todo $n \in \mathbf{N}$.

a) Sea $m \in \mathbf{Z}^-$ entonces $-m \in \mathbf{N}$ y se tiene que:

$$1 = f_a(0) = f_a(m+(-m)) = f_a(m)\cdot f_a(-m) = f_a(m)\cdot a^{-m} \Rightarrow f_a(m) = \frac{1}{a^{-m}}$$

d) Sea $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ con $n \in \mathbf{N}^*$ y $m \in \mathbf{N}$, entonces:

$$\left[f_a\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n = f_a\Big(\overbrace{\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}}^{n}\Big) = f_a(m) = a^m \Rightarrow f_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}$$

Sea $\dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ con $n \in \mathbf{N}^*$ y $m \in \mathbf{Z}^-$, entonces:

$$\left[f_a\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n = f_a(m) = \frac{1}{a^{-m}} \Rightarrow f_a\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}}$$

Veamos la unicidad. Sean f y g dos funciones exponenciales de base a, continuas; entonces por el apartado d) ambas coinciden en todo $\mathbf{Q}$, esto es, $f(q) = g(q)\ \forall q \in \mathbf{Q}$.

Se sabe que si dos funciones reales y continuas de variable real coinciden en todo $\mathbf{Q}$ también coinciden en todo $\mathbf{R}$.

En efecto, sea $x \in \mathbf{R}$, por ser $\mathbf{R}$ completo $\exists (q_n) \subset \mathbf{Q}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$. Por lo dicho anteriormente $f(q_n) = g(q_n)\ \forall n \in \mathbf{N}$ y por continuidad de las funciones f y g se tiene $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(q_n) = g(x)$

con lo que queda demostrada la proposición.

Definición 1.2.

Denotaremos a la imagen de la función exponencial en base a como $\exp_a(x)$ o como a^x y se le denomina *potencia* de a de *exponente* x.

Proposición 1.3.

Las potencias de exponente real cumplen las siguientes propiedades:

a) $\forall a\in \mathbf{R}^+ \quad \forall x,y\in \mathbf{R}: \quad a^{x+y} = a^x\cdot a^y$

b) $\forall a,b\in \mathbf{R}^+ \quad \forall x\in \mathbf{R}: \quad (a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x$

c) $\forall a\in \mathbf{R}^+ \ \forall b\in \mathbf{R}^+-\{0\} \ \forall x\in \mathbf{R}: \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

d) $\forall a\in \mathbf{R}^+-\{0\} \ \forall x\in \mathbf{R}: \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

e) $\forall a\in \mathbf{R}^+ \quad \forall x,y\in \mathbf{R}: \quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}$

Demostración:

Haremos uso de las propiedades de las potencias con exponente natural.

a) Es evidente en base a la definición de función exponencial.

b) Veamos que se cumple para todo $q\in \mathbf{Q}^*$. Sea $q = \frac{m}{n}$, $m\in \mathbf{N}$, $n\in \mathbf{N}^*$, tenemos:

$(a\cdot b)^q = (a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a\cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m\cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}$ y análogamente si $m\in \mathbf{Z}^-$ y $n\in \mathbf{N}^*$.

Sea $x\in \mathbf{R}$ y $(q_n)\subset \mathbf{Q}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$. Entonces:

$$(a\cdot b)^x = \lim_{n\to\infty}(a\cdot b)^{q_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a^{q_n}\cdot b^{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}\cdot\lim_{n\to\infty} b^{q_n} = a^x\cdot b^x$$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^x\cdot b^x = \left(\frac{a}{b}\cdot b\right)^x = a^x \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (b \neq 0)$

d) $1 = a^0 = a^{x-x} = a^x\cdot a^{-x} \Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (a \neq 0)$

e) Veamos que se cumple para todo $q,q'\in \mathbf{Q}$. Para no extendernos excesivamente demostraremos sólo el caso $q = \frac{m}{n}$, $q' = \frac{m'}{n'}$, con $m,m'\in \mathbf{N}$ y $n,n'\in \mathbf{N}^*$.

$$(a^q)^{q'} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m'}{n'}} = \left[\sqrt[n]{a^m}\right]^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{\left[\sqrt[n]{a^m}\right]^{m'}} = \sqrt[n']{\sqrt[n]{\left(a^m\right)^{m'}}} = \sqrt[n.n']{a^{m.m'}} = a^{\frac{m.m'}{n.n'}} = a^{q.q'}$$

Sean $x = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} q'_n$, $(q_n),(q'_n)\subset \mathbf{Q}$. Entonces:

$$\left[a^x\right]^y = \lim_{n\to\infty}\left[a^x\right]^{q'_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} a^{q_n}\right]^{q'_n} = \lim_{n\to\infty}\left[a^{q_n}\right]^{q'_n} = \lim_{n\to\infty} a^{q_n\cdot q'_n} = a^{x.y},$$

por ser la función x^q continua y ser $\lim_{n\to\infty}(q_n \cdot q'_n) = x \cdot y$.

Proposición 1.4.

Si a > 1 la función exponencial es estrictamente creciente y si a < 1 estrictamente decreciente.

Demostración:

Supongamos a > 1. Si p y q son dos números racionales tales que p < q, entonces $a^p < a^q$. En efecto: $p < q \Rightarrow q - p > 0 \Rightarrow a^{q-p} > 1$ por ser a^{q-p} raíz de un radicando estrictamente superior a 1.

Sean $x,y \in \mathbf{R}$ tales que $x < y$. Entonces existen $p,q \in \mathbf{Q}$, $(p_n),(q_n) \subset \mathbf{Q}$ tales que: $\lim_{n\to\infty} p_n = x$, $\lim_{n\to\infty} q_n = y$, $p_n < x < p < q < y < q_n \quad \forall n\in\mathbf{N}^*$.

Por tanto se tiene que: $a^{p_n} < a^p < a^q < a^{q_n} \quad \forall n\in\mathbf{N}^*$ y de aquí tomando límites: $a^x \le a^p < a^q \le a^y$.

De forma análoga se demuestra el caso a < 1.

Proposición 1.5.

La función exponencial es biyectiva.

Demostración:

Es inyectiva por serlo toda función monótona continua. Veamos que también es suprayectiva. Supongamos a > 1 y sean $x \in \mathbf{R}^+-\{0\}$, $b = a-1 > 0$. Entonces por la propiedad arquimediana de $\mathbf{R}$, $\exists\ n\in\mathbf{N}$ / $n\cdot b > x$ y $n\cdot b > \frac{1}{x}$.

Para este n se tiene: $n\ge1$ y $a^n = (1+b)^n = 1 + n\cdot b + \cdots > n\cdot b$

Por tanto: $a^n > x$ y $a^n > \frac{1}{x}$, esto es, $a^{-n} < x < a^n$

Por la propiedad Darboux $\exists\ y\in\mathbf{R}$ / $x = a^y$ con lo que queda demostrado para el caso a > 1.

El caso a < 1 se demuestra de manera análoga.

Corolario 1.2.

Si $a\neq1$ la función exponencial tiene inversa.

2. La función exponencial de base e.

Existen varios métodos para encontrar la función exponencial en base e. los métodos constructivos se basan en los resultados de la proposición 1.2 pero no ofrecen una fórmula o expresión algebraica que permita determinar el valor de la función cuando el exponente es irracional. En los demás casos si que se da una fórmula, por ejemplo definiéndola como:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$