

TEMA 34
ANÁLISIS Y FORMALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS
GEOMÉTRICOS INTUITIVOS: INCIDENCIA, PARALELISMO,
PERPENDICULARIDAD, ÁNGULO, ETCÉTERA.

1. El plano afín. Incidencia y paralelismo.
2. Orden y distancia entre los puntos del plano.
3. Perpendicularidad.
4. Ángulos.
5. Relación entre las definiciones axiomática y vectorial.

1. El plano afín. Incidencia y paralelismo.

Definición 1.1.

Sea P un conjunto no vacío llamado *plano* cuyos elementos se denominan *puntos* y \mathcal{R} una colección de subconjuntos de P llamados *rectas*.

Dadas dos rectas $R, S \in \mathcal{R}$ se dice que son *paralelas* si $R = S$ ó $R \cap S = \emptyset$. Se escribe $R \parallel S$.

Definición 1.2. Axiomas de incidencia

Se dice que (P, \mathcal{R}) es un *plano afín* si se verifican los siguientes axiomas:

i) Hay al menos dos rectas en el plano. Cada recta tiene al menos dos puntos, esto es:

$$\begin{aligned} &\exists R, S \in \mathcal{R} / R \neq S \\ &\forall R \in \mathcal{R} \quad \exists a, b \in R / a \neq b \end{aligned}$$

ii) Para todo par de puntos distintos del plano existe una única recta que los contiene, es decir:

$$\forall a, b \in P / a \neq b \quad \exists! R \in \mathcal{R} / a, b \in R$$

La recta R se denota como $\langle a, b \rangle$

iii) Dada una recta y un punto cualquiera, existe una única recta que pasa por dicho punto y es paralela a la anterior, esto es:

$$\forall a \in P \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad \exists! S \in \mathcal{R} / a \in S, S \parallel R$$

Este axioma se conoce como *postulado de Euclídes*.

Observación 1.1.

La intersección de dos rectas distintas es o bien nula o bien solo consta de un único punto. Esto se deduce inmediatamente del axioma ii).

Esto conduce a la siguiente definición:

Definición 1.3.

Se dice que dos rectas distintas *se cortan* si su intersección es no nula. También se dice que las dos rectas son *secantes*.

Definición 1.4.

Dados los puntos $a_1, a_2, \dots, a_n \in P$ se dice que están *alineados* si existe una recta R tal que $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$

Proposición 1.1.

En el plano afín existen al menos tres puntos distintos no alineados.

Demostración:

Sean $R, S \in \mathcal{R}$ con $R \neq S$, $a, b \in R$ con $a \neq b$ y $c, d \in S$ con $c \neq d$. Entonces c ó d no pertenecen a R puesto que en caso contrario sería $R = S$, según el

axioma ii), absurdo. Podemos suponer que este punto es c , así pues $c \in S$ y $c \notin R$. Supongamos que exista una recta T tal que $a, b, c \in T$. Entonces también según el axioma ii) debería ser $T = R$ y por tanto $c \in R$, absurdo.

Proposición 1.2.

Si dos rectas no son paralelas entonces su intersección está formada por un único punto.

Demostración:

$$R \not\parallel S \Rightarrow R \cap S \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in R \cap S$$

Sea $b \in R \cap S$ tal que $b \neq a$, entonces $R = \langle a, b \rangle = S$, y por tanto $R \parallel S$, absurdo.

$$\text{Así pues } R \cap S = \{a\}$$

Observación 1.2.

Consecuencia inmediata de esta proposición y de la observación 1.1 es que dos rectas son no paralelas si y solo si son secantes.



Figura 1.1.

Proposición 1.3.

La relación de paralelismo es una relación de equivalencia en \mathcal{R} .

Demostración:

Las propiedades reflexiva y simétrica son triviales en base a la definición 1.1.

Sean $R, S, T \in \mathcal{R}$, tales que $R \parallel S$ y $S \parallel T$, entonces $R \cap T = \emptyset$ ó bien $R \cap T \neq \emptyset$. En el primer caso resulta $R \parallel T$, en el segundo existirá un punto que pertenece tanto a R como a T , ambas paralelas a S , por tanto, según el postulado de Euclídes debe ser $R = T$, así pues en cualquier caso es $R \parallel T$.

Según hemos visto la relación de paralelismo define una partición en el conjunto de todas las rectas del plano, \mathcal{R} / \parallel , lo que da pie a la siguiente definición:

Definición 1.5.

Cada clase de equivalencia de rectas paralelas se denomina *dirección*. Dada una dirección δ y una recta $R \in \delta$, diremos que δ es la dirección de R .

Observación 1.3.

A partir de la proposición 1.3 se puede redefinir el postulado de Euclides de la siguiente forma:

$$\forall a \in P \quad \forall \delta \in \mathcal{R} / \parallel \quad \exists! S \in \delta / a \in S$$

Proposición 1.4.

En el plano afín (P, \mathcal{R}) existen al menos tres direcciones distintas.

Demostración:

Según la proposición 1.1 existen al menos tres puntos distintos a_1, a_2 y a_3 no alineados, en consecuencia las tres rectas $\langle a_1, a_2 \rangle$, $\langle a_2, a_3 \rangle$ y $\langle a_1, a_3 \rangle$ son distintas y por tanto no paralelas dos a dos ya que su intersección es no nula, así pues hay al menos tres direcciones distintas en el plano.

Proposición 1.5.

Sea δ una dirección, $R \in \mathcal{R}$ tal que $R \notin \delta$ y $a \in P - R$. Entonces se verifica: $\exists! b \in R / \langle a, b \rangle \in \delta$

Demostración:

Según el postulado de Euclides: $\exists! S \in \delta / a \in S$, además:

$$R \notin \delta, S \in \delta \Rightarrow R \not\parallel S \Rightarrow \exists! b \in R \cap S$$

De aquí que:

$$a \in P - R, a \in S, b \in R, b \in S \Rightarrow a \neq b, a, b \in S \Rightarrow \langle a, b \rangle = S \in \delta$$

Sea $c \in R$ tal que $c \neq b$ y $\langle a, c \rangle \in \delta$, entonces: $\langle a, b \rangle \parallel \langle a, c \rangle \Rightarrow \langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle = \langle b, c \rangle = R \notin \delta$, absurdo. Así pues $c = b$ y el punto b es único.

Notación.

Dado un punto $a \in P$ y una dirección δ , denotamos como $\delta(a)$ la única recta del plano de dirección δ que contiene al punto a .

Definición 1.6.

Sean δ una dirección del plano y $R \in \mathcal{R}$ con $R \notin \delta$. Se llama *proyección sobre R con dirección δ* a la aplicación $p_{\delta, R}: P \rightarrow R: a \rightarrow b / \{b\} = \delta(a) \cap R$.

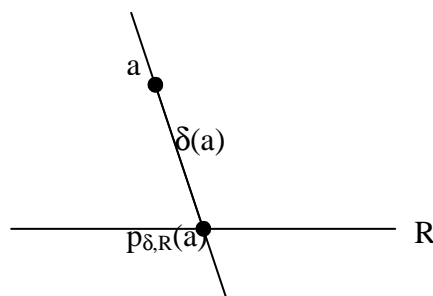


Figura 1.2. Proyección de un punto sobre una recta.

Proposición 1.6.

Sean δ una dirección del plano y $R, S \in \mathcal{R}$ con $R, S \notin \delta$. Entonces la restricción $p_{\delta, R|S}$ es biyectiva. Además $p_{\delta, R|S} = (p_{\delta, S|R})^{-1}$

Demostración:

Sean $a, b \in S$ tales que $a \neq b$ y supongamos $p_{\delta, R}(a) = p_{\delta, R}(b)$. Entonces es $\delta(a) \cap R = \delta(b) \cap R$. Sea $\{c\} = \delta(a) \cap R = \delta(b) \cap R$. Ahora bien:

$\delta(a), \delta(b) \in \delta$, $c \in \delta(a)$, $c \in \delta(b) \Rightarrow \delta(a) = \delta(b) \Rightarrow S = \langle a, b \rangle \in \delta$, absurdo. Así pues, si $p_{\delta, R}(a) = p_{\delta, R}(b)$ entonces $a = b$, lo que prueba la inyectividad.

Sea $c \in R$ y la recta $\delta(c)$. Consideremos el único punto a del plano tal que $\{a\} = \delta(c) \cap S$. Este punto existe ya que $S \notin \delta$. Veamos que $p_{\delta, R}(a) = c$. $\delta(a), \delta(c) \in \delta$, $a \in \delta(a)$, $a \in \delta(c) \Rightarrow \delta(a) = \delta(c) \Rightarrow p_{\delta, R}(a) = \delta(a) \cap R = \delta(c) \cap R = \{c\} \Rightarrow p_{\delta, R}(a) = c$. Así pues queda probada la sobreyectividad y al mismo tiempo que $p_{\delta, R|S} = (p_{\delta, S|R})^{-1}$.

Corolario 1.1.

Dos rectas cualesquiera del plano tienen el mismo cardinal.

2. Orden y distancia entre los puntos del plano.

Definición 2.1.

Se llama *recta ordenada* a cualquier recta del plano donde se haya definido una relación de orden total entre sus puntos.

Si " \leq " denota la relación de orden total en una recta, denotamos como " $<$ " la relación definida por:

$$\forall a, b \in R: \quad a < b \Leftrightarrow a \neq b, a \leq b$$

A esta última relación se le llama "menor que".

Observación 2.1.

Se demuestra fácilmente que la relación " $<$ " así definida cumple todas las propiedades de una relación de orden estricto.

Ni que decir tiene que si $a \leq b$ entonces es $a < b$ ó bien $a = b$, ya que si $a \neq b$ al ser también $a \leq b$, según la definición anterior es $a < b$.

Esto justifica que a la relación " \leq " se la llame "menor o igual que".

El lector puede comprobar fácilmente que son ciertas las siguientes contradicciones, útiles para posteriores demostraciones:

$$\begin{aligned} a < b \text{ y } a = b, & \text{ absurdo} \\ a < b \text{ y } b < a, & \text{ absurdo} \quad (1) \\ a \leq b \text{ y } b < a, & \text{ absurdo} \end{aligned}$$

Así mismo se demuestra que la relación " \geq ", "mayor o igual que", definida por $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$ es de orden total y se verifica: