TEMA 41
MOVIMIENTOS EN EL PLANO. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE LAS TESELACIONES DEL PLANO. FRISOS Y MOSAICOS.

1. Introducción.
2. Movimientos en el plano.
3. Tipos de movimientos. Composición de movimientos.
   - 3.1. Traslaciones.
   - 3.2. Giros.
   - 3.3. Simetrías.
   - 3.4. Reflexiones.
4. Frisos.
5. Mosaicos.

1. Introducción.

Los movimientos en el plano son biyecciones que transforman las figuras del plano en otras figuras de la misma forma e iguales dimensiones, es decir, lo que hacen es “mover” las figuras del plano.

Haremos el estudio general para un plano afín euclídeo P, lo que nos evitará la manipulación continua y siempre tediosa de matrices, aunque este estudio se puede restringir, y es equivalente, al del plano afín euclídeo $\mathbf{R}^2$.

2. Movimientos en el plano.

Definición 2.1.

Sea P un plano euclídeo y $f: P \to P$ una biyección. Se dice que f es movimiento si:

$$\forall\ a,b \in P:\ \ d(f(a),f(b)) = d(a,b)$$

Al conjunto de todos los movimientos en el plano euclídeo P se le designa como OA(P).

Como se puede demostrar sin ninguna dificultad (se deja a cargo del lector) OA(P) tiene estructura natural de grupo respecto de la composición de aplicaciones.

El siguiente teorema caracteriza a los movimientos.

Proposición 2.1.

Sea $f: P \to P$ una biyección. Son equivalentes:

i) f es movimiento.

ii) f es transformación afín, y su transformación lineal asociada $\vec{f}$ verifica:

$$\forall\ \ \vec{u},\vec{v} \in \vec{P}:\ \ \vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

iii) f es transformación afín y $\vec{f}$ verifica:

$$\forall\ \ \vec{u} \in \vec{P}:\ \ \left\|\vec{f}(\vec{u})\right\| = \|\vec{u}\|$$

iv) f es transformación afín y si $\vec{B}$ es base ortonormal de $\vec{P}$, entonces $\vec{f}(\vec{B})$ es base ortonormal de $\vec{P}$.

v) Si $\vec{B}$ es una base ortonormal la matriz de la transformación lineal $M_{\vec{B}}(\vec{f})$ es euclídea.

Demostración:

Haremos la demostración según el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \text{i)} \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\ \text{iii)} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{ii)} \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{iv)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{v)} \end{tikzcd}$$

i) $\Rightarrow$ ii) Consideremos un punto $a \in P$ y la aplicación:

$$\vec{f}_a : \vec{P} \to \vec{P} : \vec{v} \to \vec{f}_a(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a)f(a+\vec{v})}$$

Demostraremos en primer lugar que:

$$\forall\ \vec{u},\vec{v} \in \vec{P} :\ \vec{f}_a(\vec{u}) \cdot \vec{f}_a(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad (1)$$

Utilizaremos la igualdad siguiente:

$$\forall\ \vec{a},\vec{b} \in \vec{P} : \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2\right]$$

Por tanto tendremos:

$$\forall\ \vec{u},\vec{v} \in \vec{P} :\ \vec{f}_a(\vec{u}) \cdot \vec{f}_a(\vec{v}) = \frac{1}{2}\left[\vec{f}_a(\vec{u})^2 + \vec{f}_a(\vec{v})^2 - \left(\vec{f}_a(\vec{u}) - \vec{f}_a(\vec{v})\right)^2\right] \qquad (2)$$

Ahora bien:

$$\vec{u}^2 = d(a, a+\vec{u})^2 = d(f(a), f(a+\vec{u}))^2 = \overrightarrow{f(a)f(a+\vec{u})}^2 = \vec{f}_a(\vec{u})^2$$

y de la misma forma: $\vec{v}^2 = \vec{f}_a(\vec{v})^2$

Además:

$$\left(\vec{f}_a(\vec{u}) - \vec{f}_a(\vec{v})\right)^2 = \overrightarrow{f(a+\vec{u})f(a+\vec{v})}^2 = d(f(a+\vec{u})f(a+\vec{v}))^2 = d(a+\vec{u}, a+\vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$$

Así pues, la expresión (2) queda de la forma:

$$\vec{f}_a(\vec{u}) \cdot \vec{f}_a(\vec{v}) = \frac{1}{2}\left[\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2\right] = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Veamos ahora que $\vec{f}_a$ es aplicación lineal.

Sean $\vec{u},\vec{v} \in \vec{P}$ y $\lambda,\mu \in$ **R**. Entonces:

$$\left[\vec{f}_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda\vec{f}_a(\vec{u}) - \mu\vec{f}_a(\vec{v})\right]^2 = \vec{f}_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})^2 + \lambda^2\vec{f}_a(\vec{u})^2 + \mu^2\vec{f}_a(\vec{v})^2 -$$

$$- 2\vec{f}_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\lambda\vec{f}_a(\vec{u}) - 2\vec{f}_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\mu\vec{f}_a(\vec{v}) + 2\lambda\vec{f}_a(\vec{u})\mu\vec{f}_a(\vec{v}) = (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})^2 + \lambda^2\vec{u}^2 + \mu^2\vec{v}^2 -$$

$$- 2\lambda(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\vec{u} - 2\mu(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\vec{v} + 2\lambda\mu\vec{u}\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{f}_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda\vec{f}_a(\vec{u}) - \mu\vec{f}_a(\vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_a(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\vec{f}_a(\vec{u}) + \mu\vec{f}_a(\vec{v})$$

Luego $\vec{f}_a$ es aplicación lineal asociada a f. Además, como se sabe, es única y no depende del punto $a \in P$ escogido, y es además isomorfismo. La denotamos como $\vec{f}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) De (1) se deduce de forma inmediata que:

$$\forall\ \vec{u} \in P: \quad \left\|\vec{f}(\vec{u})\right\| = \sqrt{\vec{f}(\vec{u})^2} = \sqrt{\vec{u}^2} = \|\vec{u}\|$$

iii) $\Rightarrow$ i) $\forall$ a,b $\in$ P: $d(a,b) = d(a,a+\overrightarrow{ab}) = \left\|\overrightarrow{ab}\right\| = \left\|\vec{f}\left(\overrightarrow{ab}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{f(a)f(b)}\right\| =$

$$= d\left(f(a), f(b)\right)$$

ii) $\Rightarrow$ iv) Es obvio.

iv) $\Rightarrow$ ii) Basta considerar que el producto escalar de dos vectores $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e}_i$ en un espacio vectorial euclídeo de dimensión n, donde $\vec{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ es base ortonormal, es:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Por tanto:

$$\vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j (\vec{f}(\vec{e}_i) \cdot \vec{f}(\vec{e}_j)) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

iv) $\Leftrightarrow$ v) Ya que se verifica que:

Si $\vec{B}$ es base ortonormal de $\vec{P}$ y $\vec{B}' = \vec{B} \cdot A$, entonces $\vec{B}'$ es base ortonormal de $\vec{P}$, si y solo si A es matriz euclídea.

Observación 2.1.

Una matriz ortogonal euclídea $A \in O(n)$ verifica: $A^t \cdot A = I$. Luego tomando determinantes en ambos miembros se deduce que:

$$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 2.2.

Sea f un movimiento y $M_{\vec{B}}(\vec{f})$ su matriz euclídea asociada respecto de una base ortonormal $\vec{B}$. Entonces si $\det M_{\vec{B}}(\vec{f}) = 1$ al movimiento se le llama *directo* y si $\det M_{\vec{B}}(\vec{f}) = -1$, *inverso*.

Al conjunto de movimientos directos del plano euclídeo se le denota como $OA^+(P)$ y al conjunto de movimientos inversos como $OA^-(P)$.

Observación 2.2.

Es fácil demostrar, teniendo en cuenta que tratamos con matrices ortogonales, que $OA^+(P)$ es un grupo y que $OA^-(P)$ no lo es, baste solamente considerar en este caso que según la regla de los signos, el producto de dos de estos movimientos es directo.

Veamos ahora cómo son las matrices asociadas a cada uno de estos movimientos.

Proposición 2.2.

Sea $f: P \to P$ una biyección. Son equivalentes:

i) f es movimiento directo.

ii) f es transformación afín y si $\vec{B}$ es base ortonormal la matriz de $\vec{f}$ respecto de $\vec{B}$ es:

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{con } -\pi \le \theta \le \pi$$

También son equivalentes:

i) f es movimiento inverso.

ii) f es transformación afín y existe una base ortonormal $\vec{B}$ tal que la matriz de $\vec{f}$ respecto de $\vec{B}$ es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $\vec{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ una base ortonormal cualquiera de P, y $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matriz de O(2) que representa a $\vec{f}$ respecto de $\vec{B}$. La condición $A^t \cdot A = I$ se descompone en las condiciones:

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad (1)$$
$$ac + bd = 0 \qquad (2)$$
$$c^2 + d^2 = 1 \qquad (3)$$

De (1) se deduce que existe un θ tal que $-\pi \le \theta \le \pi$ y

$$a = \cos\theta \qquad b = \text{sen}\ \theta$$

De (2) se deduce: $c \cdot \cos\theta + d \cdot \text{sen}\ \theta = 0$ (4)

Y de (3) y (4) se deduce: $c^2 = \text{sen}^2\theta$.

Por lo que se pueden dar dos casos:

a) $c = -\text{sen}\ \theta$, y por (4) es $d = \cos\theta$, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

b) $c = \text{sen}\ \theta$, por lo que será $d = -\cos\theta$, y la matriz A queda de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Como se puede comprobar fácilmente los autovalores de A son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son autovectores unitarios asociados a cada autovalor entonces el sistema $\vec{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ es base ortonormal de $\vec{P}$, ya que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Por tanto la matriz de $\vec{f}$ respecto de $\vec{B}$ será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así pues, si f es movimiento directo la matriz asociada a $\vec{f}$ es $G(\theta)$ puesto que el determinante de J es –1.

Al contrario sucede si f es movimiento inverso.