

**TEMA 66**  
**DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA.**  
**CARACTERÍSTICAS Y TRATAMIENTO.**  
**LA DISTRIBUCIÓN NORMAL. APLICACIONES.**

1. Variable aleatoria continua.
  - 1.1. Esperanza matemática.
  - 1.2. Función característica.
2. Distribución normal.
  - 2.1. Interpretación gráfica.
  - 2.2. Teorema central del límite. Aplicaciones.

## 1. Variable aleatoria continua.

### Definición 1.1.

Sea  $X: (\Omega, \mathcal{M}, P) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), P_X)$  una v.a. con función de distribución  $F$ . Se dice que  $X$  es *continua* si existe una función  $f$  definida en  $\mathbf{R}$  tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

La función  $f$  recibe el nombre de *función de densidad* de la variable aleatoria continua  $X$ .

Al conjunto  $C = \{x \in \mathbf{R} / f(x) > 0\}$  se le llama *soporte* de la variable aleatoria.

Abreviadamente denotaremos una variable aleatoria continua como v.a.c.

### Observación 1.1.

De la definición se deduce que el cálculo del valor de la función de distribución se reduce a calcular el área de una integral definida.

### Teorema 1.1.

Sea  $X$  una v.a.c. con función de densidad  $f$  y función de distribución  $F$ . Entonces se verifica:

- a)  $F$  es continua
- b)  $F'(x) = f(x)$

c)  $\forall$  intervalo  $I \subset \mathbf{R}$  de extremos  $a$  y  $b$  es  $P(X \in I) = \int_b^a f(t)dt$

c)  $D = \{x \in \mathbf{R} / p(x) > 0\} = \emptyset$

Demostración:

a), b) y c) son inmediatas en base a las propiedades de la integral definida.

c) Según la proposición 3.1 del tema 65  $\forall x \in \mathbf{R}: p(x) = F(x) - F(x^-)$ , pero por ser  $F$  continua  $F(x) = \lim_{y \rightarrow x^-} F(y) = F(x^-)$ , por tanto:

$$\forall x \in \mathbf{R}: p(x) = 0 \Rightarrow D = \emptyset$$

En consecuencia toda variable aleatoria continua no es discreta. Realmente existen variables aleatorias que no son ni continuas ni discretas pues basta con que tengan una función de distribución continua en algún intervalo y discontinua en algunos puntos, lo que hará que el soporte  $D$  sea distinto de  $\emptyset$ .

La siguiente proposición nos asegura que basta con tener dada una cierta función de densidad  $f$  para poner definir una variable aleatoria que tenga como función de distribución la caracterizada por  $f$ .

### Proposición 1.1.

Sea  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  integrable y  $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ . Entonces

$F$  es función de distribución si y solo si  $f$  es tal que:

a)  $\forall x \in \mathbf{R}: f(x) \geq 0$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Demostración:

$\Rightarrow$ ) Sea  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que verifique a) y b) entonces para todo  $x, y \in \mathbf{R}$  con  $x \leq y$ :

$$F(y) - F(x) = \int_{-\infty}^y f(t)dt - \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt \geq 0$$

luego  $F$  es creciente.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(t)dt = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

En consecuencia  $F(x)$  es una función de distribución.

$\Leftarrow$ ) Veamos a):  $F(x)$  creciente  $\Rightarrow f(x) = F'(x) \geq 0$ .

Además se verifica b):

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

### Observación. 1.2.

En la práctica para hacer que una función  $f$  definida positiva e integrable que no cumpla b) sea función de densidad de alguna variable aleatoria continua basta con trasformarla en  $g = \frac{f}{\|f\|}$  donde  $\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ . A esto se le llama *normalizar* la función de densidad.

### Ejemplo 1.1.

Ejemplos de distribuciones de variable continua usadas en Estadística son:

- Distribución normal  $N(0,1)$ , cuya función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ampliamente usada en inferencia estadística aplicada a ciencias sociales y naturales.

- Distribución de Pareto:  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \frac{ab^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases}$  que describe la

distribución de la renta de las personas.

- Distribuciones gamma, beta, de Cauchy y de Laplace.

Hay otros tipos de distribuciones que sirven de aplicación en determinadas parcelas de las ciencias como por ejemplo en Física la distribución de Boltzmann que permite estudiar la distribución de energías en un sistema de partículas.

### 1.1. Esperanza matemática.

#### Proposición 1.1.1.

Sea  $X$  una v.a.c. con función de distribución  $F$  y función de densidad  $f$  y  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivable con  $g'(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ , entonces:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad \text{y} \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

Demostración:

Supongamos  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \in \mathbf{R}$  y  $X \geq 0$ . Sea  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$  una sucesión de particiones

en intervalos de  $\mathbf{R}^+$  con  $H_n < H_{n+1}$  y en la que los intervalos están dados por:  $B_{i,n} = [x_{i,n}, x_{i,n} + 1/2^n)$  con  $x_{1,n} = 0$ ,  $x_{i+1,n} = x_{i,n} + 1/2^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n$  y el último  $B_{n \cdot 2^n + 1, n} = [n, +\infty)$ . Definimos la sucesión de v.a.s.  $(X_n)$  como sigue:

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad X_n: \Omega \rightarrow \mathbf{R}: \quad X_n(X^{-1}(B_{i,n})) = x_{i,n} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n \quad \text{y} \\ X_n(X^{-1}(B_{n \cdot 2^n + 1, n})) = n$$

Claramente se trata de una sucesión monótona no decreciente de v.a.s. no negativas tales que  $(X_n) \rightarrow (X)$ . Se deduce:

$$E[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n + 1} x_{i,n} P(X \in B_{i,n}) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} x_{i,n} (F(x_{i,n} + 1/2^n) - F(x_{i,n})) + \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(n)) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \xi_{i,n} f(\xi_{i,n}) \frac{1}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} (x_{i,n} - \xi_{i,n}) f(\xi_{i,n}) \frac{1}{2^n}$$

donde  $\xi_{i,n} \in B_{i,n}$ , ya que:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_n^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{+\infty} nf(x)dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{+\infty} xf(x)dx = 0$$

Ahora bien  $0 \leq \xi_{i,n} - x_{i,n} < 1/2^n$  por lo que considerando la definición de la integral de Riemann es:

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} (x_{i,n} - \xi_{i,n}) f(\xi_{i,n}) \frac{1}{2^n} \geq - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} f(\xi_{i,n}) \frac{1}{2^n} = \\
 &= - \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \right) \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 \cdot 1 = 0 \\
 E[X] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \xi_{i,n} f(\xi_{i,n}) \frac{1}{2^n} = \int_0^{+\infty} x f(x) dx
 \end{aligned}$$

Si  $X$  es una v.a.c. cualquiera el resultado se sigue de:

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-] = \int_0^{+\infty} x f(x) dx - \int_0^{+\infty} y f(-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Si  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  diverge entonces  $E[X]$  también diverge en el mismo sentido

como fácilmente se deduce del proceso seguido.

Si  $g$  es derivable entonces también es continua e  $Y = g(X)$  es una v.a. de función de distribución  $F_g$  y función de densidad  $f_g$ . Veamos que relación tiene con la distribución  $F$  de  $X$ .

$$\begin{aligned}
 P(X \leq x) &= P(Y \leq y=g(x)) \Rightarrow F(x) = F_g(y) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f(x) = F'(x) = F_g'(y) g'(x) = f_g(y) g'(x) \Rightarrow \\
 \Rightarrow E[Y = g(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_g(y) g'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx
 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable  $y = g(x)$ .

## 1.2. Función característica.

Según la definición 4.3.1 dada en el tema anterior si  $X$  es una v.a.c. con función de densidad  $f$  la *función característica* de  $X$  será la transformada:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = E[e^{itX}]$$

Veamos también que en el caso de una variable aleatoria continua  $X$  sus derivadas sucesivas en  $t = 0$  determinan cuales son los momentos de  $X$  respecto al origen.

### Teorema 1.2.1.

Sea  $X$  una v.a.c. tal que existen los momentos  $\alpha_n$  de  $X$ . Entonces para todo  $t \in \mathbf{R}$  existe  $\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x^n f(x) dx$  y en particular  $\varphi^{(n)}(0) = i^n \alpha_n$ .